Úloha 2

Seznámení se systémem PULSE a měření vlastních kmitů na kovovém profilu

2.1 Zadání

1. Seznamte se se systémem PULSE firmy Brüel & Kjær
2. Změřte odezvu kovového nosníku na silový impuls generovaný úderem
3. Měření proveďte pro buzení ve třech bodech, se snímači umístěnými ve třech polohách. Měření porovnejte s teorií.

2.2 Obecná část

Máme tyč obdélníkového průřezu délky l jejíž jeden konec je vetknutý (upevněný) a druhý volný. Tuto tyč slabým ťuknutím v podélné ose symetrie uvedeme do kmitavého pohybu. Předpokládáme, že ťuknutí nevyvolá torzní ani podélné kmity, ale pouze kmity ohybové, pro které lze odvodit (viz např. [1]) rovnici:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{Eh^2}{12\rho}\frac{\partial^4 u}{\partial z^4} = 0, \tag{2.1}$$

kde E je Youngův modul pružnosti, u je výchylka v daném místě, h je tloušťka tyče, ρ je hustota, t je čas a z je souřadná osa, orientovaná rovnoběžně s podélnou osou tyče.

Řešení této rovnice hledáme ve tvaru součinu dvou funkcí jedné proměnné, podobně jako při řešení vlnové rovnice:

$$u(z,t) = \psi(t)\varphi(z) \tag{2.2}$$

Po delším počítání dospějeme k výsledku

$$u(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n (F_n \cos\omega_n t + G_n \sin\omega_n t), \tag{2.3}$$

kde

$$\begin{aligned}\varphi_n = A_n \Big[&(\cos m_n + \cosh m_n)\left(\cos\frac{m_n}{l}z - \cosh\frac{m_n}{l}z\right) + \\ &+ (\sin m_n - \sinh m_n)\left(\sin\frac{m_n}{l}z - \sinh\frac{m_n}{l}z\right)\Big].\end{aligned} \tag{2.4}$$

Konstanty F_n a G_n určíme z počátečních podmínek a konstanty A_n z normovacích podmínek.

Z okrajových podmínek, které v našem případě jsou

$$\varphi(0) = 0, \quad \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}z}\right)_{z=0} = 0, \quad \left(\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}z^2}\right)_{z=l} = 0, \quad \left(\frac{\mathrm{d}^3\varphi}{\mathrm{d}z^3}\right)_{z=l} = 0$$

dostaneme pro hodnoty m_n transcendentní rovnici

$$\cos m \cosh m = -1. \tag{2.5}$$

Prvních 15 kořenů této rovnice je přibližně

$$\begin{array}{lll} m_1 = 1{,}8751; & m_2 = 4{,}6941; & m_3 = 7{,}8548; \\ m_4 = 10{,}9955; & m_5 = 14{,}1371; & m_6 = 17{,}2787; \\ m_7 = 20{,}4203; & m_8 = 23{,}5619; & m_9 = 26{,}7035; \\ m_{10} = 29{,}8451; & m_{11} = 32{,}9867; & m_{12} = 36{,}1283; \\ m_{13} = 39{,}2699; & m_{14} = 42{,}4115; & m_{15} = 45{,}5531. \end{array}$$

Pro kruhovou frekvenci ω_n pak z řešení plyne vztah

$$\omega_n = \frac{m_n^2}{l^2}\sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho}} \tag{2.6}$$

Z uvedeného vidíme, že ohybové kmity tyče při tomto uspořádání nebudou harmonické násobky nějaké základní frekvence, ale budou v poměru kvadrátů m_n.

Změříme-li rozměry tyče, můžeme přibližně spočítat frekvence vlastních kmitů. U použité tyče je modul pružnosti přibližně $E = 2{,}1 \cdot 10^{11}\,\mathrm{Pa}$, hustotu $\rho = 8000\,\mathrm{kg/m^3}$, délka tyče $l = 85{,}8\,\mathrm{cm}$, tloušťka $h = 0{,}3\,\mathrm{cm}$. Dosadíme-li do rovnice (2.6) dostaneme pro prvních 15 vlastních frekvencí tyto hodnoty:

$$\begin{array}{lll} f_1 = 3{,}4\,\mathrm{Hz}; & f_2 = 21{,}1\,\mathrm{Hz}; & f_3 = 59{,}2\,\mathrm{Hz}; \\ f_4 = 116{,}0\,\mathrm{Hz}; & f_5 = 191{,}7\,\mathrm{Hz}; & f_6 = 286{,}4\,\mathrm{Hz}; \\ f_7 = 400{,}0\,\mathrm{Hz}; & f_8 = 532{,}6\,\mathrm{Hz}; & f_9 = 684{,}0\,\mathrm{Hz}; \\ f_{10} = 854{,}5\,\mathrm{Hz}; & f_{11} = 1043{,}8\,\mathrm{Hz}; & f_{12} = 1252{,}1\,\mathrm{Hz}; \\ f_{13} = 1479{,}3\,\mathrm{Hz}; & f_{14} = 1725{,}5\,\mathrm{Hz}; & f_{15} = 1990{,}6\,\mathrm{Hz}. \end{array}$$

Při měření si povšimněte, jak různé polohy akcelerometru ovlivňují amplitudy jednotlivých složek, což je dáno rozložením uzlů a kmiten příslušných módů.

Literatura

[1] Miroslav Brdička, Ladislav Samek, Bruno Sopko: *Mechanika kontinua*, Academia, Praha 2000